

UDK 624.072:624.073:539.3:519.612

# ANALIZA IZVIJANJA ROŠTILJNE KONSTRUKCIJE METODOM KONAČNIH ELEMENATA FINITE ELEMENT BUCKLING ANALYSIS OF GRILLAGE STRUCTURES

Igor PEŠIĆ – Goran TURKALJ

**Sažetak:** U radu je prikazana numerička analiza stabilnosti roštiljne konstrukcije. Analiza je temeljena na metodi konačnih elemenata. Primjenom principa virtualnih radova i nelinearnog polja pomaka poprečnog presjeka izvedene su linearizirane ravnotežne jednačbe grednog konačnog elementa. Materijal je pretpostavljen kao homogen, izotropan i linearno elastičan. Problem stabilnosti tretiran je kao matrični problem vlastitih vrijednosti (linearna stabilnost). Uspoređeni su analitički i numerički rezultati za globalno učvršćenu pravokutnu roštiljnu konstrukciju.

**Ključne riječi:**

- roštiljna konstrukcija
- izvijanje
- metoda konačnih elemenata

**Summary:** This paper presents a numerical stability analysis of grillage structures. The analysis is based on finite element methods. The linearized equilibrium equations are derived by applying the linearized virtual work principle and the non-linear cross-sectional displacement field. Material is assumed to be homogeneous, isotropic and linearly elastic. Stability analysis is treated as a matrix eigenvalue problem (linear stability). Analytical and numerical results are compared for pinned rectangular grillage structures subjected to concentrated forces.

**Key words:**

- grillage structure
- buckling
- finite element method

## 1. UVOD

Među konstrukcijskim elementima, roštilji zauzimaju važno mjesto bilo da se primjenjuju zasebno ili kao pojačanja u spojevima s pločama. Roštiljne konstrukcije se često koriste u strukturama brodova i platformi. Roštilji su sustavi nosača koji teku u dva smjera, a obično se križaju pod pravim kutom [1]. Roštiljne konstrukcije su često monotonog tipa, tj. u jednom smjeru postoji veći broj nosača jednakih karakteristika s kojima se križa manji broj nosača drugih karakteristika. Nosači kojih ima više nazivaju se glavnima, a manji broj nosača u drugom smjeru se nazivaju ukrižani. Mjesta na kojima se križaju glavni i ukrižani nosači nazivaju se čvorovi.

Za analizu izvijanja roštiljnih konstrukcija razvijeno je tijekom prošlog stoljeća niz analitičkih metoda [2-5] koje se nastojalo prilagoditi njihovim specifičnostima. Metoda izjednačenja progiba može se primijeniti kod roštilja proizvoljnog oblika. Nosači unutar konstrukcije mogu biti različitih razmaka, različite krutosti i različite upetosti krajeva. Metoda se zasniva na izjednačenju progiba uzdužnih i poprečnih nosača na mjestu njihovog križanja kod izvijenog indiferentnog položaja ravnoteže roštilja. Ova metoda vrijedi sasvim općenito, ali ima tu manu da kod većeg broja čvorova vodi do velikih.

## 1. INTRODUCTION

Great importance is placed upon grillage structures in construction element engineering nowadays, whether they are used separately or as reinforcement in connection with steel plates. Grillage structures can often be found in ship structures and platforms. A grillage structure in fact is a system of supports running in two directions, usually intersected at a right angle [1]. Usually they are of the monotone type which means that there is a bigger amount of supports with the same characteristics intersected by a smaller number of supports with other characteristics. These supports that are more numerous are called "Main" and the smaller number of these in the other direction we call "Intersected supports". Places where main and intersected supports intersect are nodes.

There is a number of analytic methods developed for buckling analysis of grillage structures and each of these has attempted to accommodate for the specific characteristics of grillage structures [2-5]. The Method of equalization of deflections can be used for any shape of grill construction. Supports in construction can have different spacing, different rigidity and different fixity. The method is based on the equalization of deflections

sustava linearnih jednadžbi s velikim brojem nepoznanica.

Kod metode grede na elastičnoj podlozi, glavni nosači se smatraju kao elastična podloga, a ukrižani nosači kao grede poduprte tom elastičnom podlogom. Ova metoda je idealna za rješavanje roštilja monotonog tipa, a komplicira se s većim brojem uzdužnih nosača i onda kada se treba primijeniti na nemonotone konstrukcije.

Metoda potencijalne energije može se primijeniti kada pojedini nosači imaju različite krutosti i različito učvršćenje krajeva. Metoda počiva na pretpostavci da sile na konstrukciju djeluju statički pa je kinetička energija jednaka nuli. U tom slučaju ukupan rad vanjskih sila jednak je potencijalnoj energiji deformacije konstrukcije. Za proračun se također može koristiti dinamička analogija. Između proračuna izvijanja roštilja i proračuna vlastitih frekvencija vibracija grede s koncentriranim masama postoji analogija koja u mnogim slučajevima omogućava jednostavniji proračun roštilja.

Sve analitičke metode su ograničene na jednostavnije izvedbe konstrukcije te se u obzir moraju uzeti mnoga pojednostavljenja. U ovom radu je prikazan numerički pristup rješavanja stabilnosti roštiljnih konstrukcija. Pri tome, materijal je pretpostavljen kao izotropan i linearno-elastičan. Dozvoljeni su veliki pomaci i rotacije, ali deformacije su male. Opterećenja su pretpostavljena kao statička i konzervativna, a unutarnji momenti su određeni primjenom St. Venantove teorije uvijanja i Euler-Bernoullijeve teorije savijanja [6].

## 2. OSNOVNA RAZMATRANJA

### 2.1. Kinematika grede

Promatrana je inicijalno ravna greda s nedeformabilnim poprečnim presjekom. Odabran je desni Kartezijev koordinatni sustav ( $z, x, y$ ) tako da se  $z$ -os poklapa s aksijalnom osi grede i prolazi težištem  $O$  svakog poprečnog presjeka, a  $x$ - i  $y$ -osi su glavne osi inercije poprečnog presjeka. Komponente pomaka poprečnog presjeka se definiraju kao u [7]:

$$\begin{aligned} w_o &= w_o(z), \quad u_o = u_o(z), \quad v_o = v_o(z), \quad \varphi_z = \varphi_z(z), \\ \varphi_x &= -\frac{dw_o}{dz} = \varphi_x(z), \quad \varphi_y = \frac{du_o}{dz} = \varphi_y(z), \end{aligned} \quad (1)$$

gdje su:  $w_o, u_o$  i  $v_o$  pomaci težišta poprečnog presjeka u  $z$ -,  $x$ - i  $y$ - smjeru, odnosno;  $\varphi_z, \varphi_x$  i  $\varphi_y$  su kutovi zakreta poprečnog presjeka oko  $z$ -,  $x$ - i  $y$ -osi.

Neka  $\mathbf{r}_o$  označava vektor položaja materijalne točke u referentnoj konfiguraciji, a  $\mathbf{U}_o$  vektor pomaka težišta.

Ako se pretpostave male rotacije, onda se može vektor pomaka  $\mathbf{U}_{ldf}$  koji predstavlja polje pomaka poprečnog

for longitudinal and transverse supports at the point of their intersection with buckled indifferent position of balance of a grillage structure. This is a general method having the defect that in a situation with a large number of nodes it leads to large systems of linear equations with a large number of unknowns.

Another method is the method of a beam on an elastic base. The main supports are considered as an elastic base in this method and intersected supports as beams that are supported with that elastic base. This method is ideal for calculations of monotone type grill structures, but can get complicated in cases where there is a larger number of longitudinal supports and when it is used for non-monotone constructions.

The method of potential energy can be used in situations where certain supports have different rigidity and fixity. This method is based on the premise that forces act on the construction statically so that the kinetic energy is zero. In that case, the total work of outside forces is equal to the potential energy of construction deformation.

Dynamic analogy can be also used for calculation. There is an analogy between calculation of buckling of grillage structures and calculation of frequencies of beam vibrations that can simplify calculation.

All analytic methods are limited to the more simple ways of construction and a lot of simplifications must be taken into account. In this work, a numerical approach to the calculation of grillage structures stability is described. Material is assumed to be isotropic and linearly elastic. Displacements and rotations are allowed to be large but the distortions are small. The external load is assumed to be static and conservative, while internal moments are represented by the St. Venant theory of torsion and the Euler-Bernoulli theory of bending [6].

## 2. BASIC CONSIDERATIONS

### 2.1. Kinematics of Beam

The deformation of an initially straight beam with an undeformable cross-section is studied. A right-handed Cartesian co-ordinate system ( $z, x, y$ ) is chosen in such a way that the  $z$ -axis coincides with the beam axis passing through the centroid  $O$  of each cross-section, while the  $x$ - and  $y$ -axes are the principal inertial axes of the cross-section. Incremental displacement measures of a cross-section are defined as [7]:

where:  $w_o, u_o$  and  $v_o$  are rigid-body translations of the cross-section in the  $z$ -,  $x$ - and  $y$ - direction at the centroid, respectively; and  $\varphi_z, \varphi_x$  and  $\varphi_y$  are rigid-body rotations around the  $z$ -,  $x$ - and  $y$ -axis, respectively.

Let  $\mathbf{r}_o$  denote the position vector of a material point in the reference configuration and  $\mathbf{U}_o$  the translation displacement vector of the centroid. If the assumption of

presjeka izraziti kao:

small rotations is valid, then the displacement vector  $\mathbf{U}_{\text{ldf}}$ , representing the linear displacement field of a cross-section, can be written in the following form:

$$\mathbf{U}_{\text{ldf}} = \mathbf{U}_o + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \mathbf{r}_o, \quad (2)$$

gdje su:

where:

$$\mathbf{U}_{\text{ldf}} = \begin{Bmatrix} w \\ u \\ v \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_o = \begin{Bmatrix} w_o \\ u_o \\ v_o \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{r}_o = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \\ y \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_y & \varphi_x \\ \varphi_y & 0 & -\varphi_z \\ -\varphi_x & \varphi_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

U jednadžbama (2) i (3)  $w$ ,  $u$  i  $v$  su linearni izrazi ili izrazi prvog reda za pomake proizvoljne točke na poprečnom presjeku koja je definirana položajem koordinata  $x$  i  $y$ . Ako se ne mogu pretpostaviti male rotacije, tada se u analizu mora uvesti nelinearno polje pomaka  $\mathbf{U}_{\text{ndf}}$ :

In Equations (2) and (3)  $w$ ,  $u$  and  $v$  are the linear or first-order displacement terms of an arbitrary point on the cross-section defined by the position coordinates  $x$  and  $y$ . If the assumption of small rotations is not valid, then the non-linear displacement field  $\mathbf{U}_{\text{ndf}}$  should be introduced in the analysis:

$$\mathbf{U}_{\text{ndf}} = \mathbf{U}_{\text{ldf}} + \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{w} \quad \tilde{u} \quad \tilde{v}\}^T = 0.5 \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 \mathbf{r}_o, \quad (4)$$

gdje izraz  $\tilde{\mathbf{U}}$  sadrži nelinearne izraze ili izraze drugog reda za pomake koji su rezultat velikih rotacija u prostoru. Green-Lagrangeov tenzor deformacija se može napisati kao:

in which the term  $\tilde{\mathbf{U}}$  contains the nonlinear or second-order displacement terms resulting from the large space rotation effects. The Green-Lagrange strain tensor can be written as:

$$\varepsilon_{ij} \cong e_{ij} + \eta_{ij} + \tilde{e}_{ij}, \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad 2\eta_{ij} = u_{k,j} u_{k,i}, \quad 2\tilde{e}_{ij} = \tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}, \quad (5)$$

gdje zadnji izraz za deformaciju predstavlja dodatni izraz zbog učinka velikih rotacija. Ovdje treba napomenuti da zbog geometrijske pretpostavke o nevitoperenju poprečnog presjeka, komponente deformacija  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}$  i  $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$  u jednadžbi (5) trebaju biti jednake nuli.

where the last strain term is the additional one due to large rotation effects. It should be noted here that according to the geometrical hypothesis of the cross-sectional in-plane rigidity, the strain components  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{yy}$  and  $2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$  in Equation (5) should be equal to zero.

## 2.2. Rezultanta unutrašnjih sila

## 2.2. Beam Stress Resultants

Pod pretpostavkom krutosti u ravnini deformacije ( $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ), a prema teorijama mehanike za savijanje i uvijanje, rezultante naprežanja se definiraju kao:

Assuming the rigid in-plane deformations ( $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ), then according to the engineering theories for bending and torsion, stress resultants can be defined as follows:

$$F_z = \int_A \sigma_z dA, \quad F_x = \int_A \tau_{zx} dA, \quad F_y = \int_A \tau_{zy} dA, \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA, \quad (6)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA, \quad M_y = -\int_A \sigma_z x dA, \quad \bar{K} = \int_A \sigma_z (x^2 + y^2) dA,$$

gdje  $F_z$  predstavlja aksijalnu silu,  $F_x$  i  $F_y$  su poprečne sile,  $M_z$  je Saint-Venantov ili uniformni moment uvijanja,  $M_x$  i  $M_y$  su momenti savijanja oko  $x$ - i  $y$ -osi, a  $\bar{K}$  je Wagnerov koeficijent [8]. Pod pretpostavkom linearno elastičnog ponašanja, veze između komponenata naprežanja i deformacija se mogu izraziti kao:

where  $F_z$  represents an axial force,  $F_x$  and  $F_y$  are shear forces,  $M_z$  is the Saint-Venant or uniform torsion moment,  $M_x$  and  $M_y$  are bending moments with respect to the  $x$ - and  $y$ -axes, respectively, while  $\bar{K}$  is the Wagner coefficient [8]. Assuming the linear elastic material behavior, the incremental stress-strain relations can be defined as:

$$\sigma_z = E e_{33} = E e_{zz}, \quad \tau_{zx} = 2G e_{31} = G e_{zx}, \quad \tau_{zy} = 2G e_{32} = G e_{zy}. \quad (7)$$

gdje su  $E$  i  $G$  moduli elastičnosti i smicanja. Nakon uvrštavanja izraza (5) i (7) u izraz (6), veze između komponenata rezultante unutrašnjih sila i komponenata pomaka se mogu izraziti kao:

where  $E$  and  $G$  are the elastic and shear moduli, respectively. After substituting Equations (5) and (7) into (6), the incremental force-displacement can be written as:

$$\begin{aligned}
F_z &= EA \frac{dw_0}{dz}, \quad F_x = -\frac{dM_y}{dz}, \quad F_y = \frac{dM_x}{dz}, \quad M_z = GI_t \frac{d\varphi_z}{dz}, \\
M_x &= -EI_x \frac{d^2v_0}{dz^2}, \quad M_y = EI_y \frac{d^2u_0}{dz^2}, \quad \bar{K} = F_z \frac{I_P}{A},
\end{aligned} \tag{8}$$

gdje je  $A$  površina poprečnog presjeka,  $I_P$  je polarni moment inercije poprečnog presjeka, a  $I_t$  torzijski moment inercije ili Saint-Venantova torzijska konstanta.

where  $A$  is the cross-sectional area,  $I_P$  is the cross-sectional polar moment of inertia, respectively, while  $I_t$  is the Saint-Venant torsion constant.

### 2.3. Ravnotežne jednadžbe

Ravnotežne jednadžbe deformiranog grednog elementa mogu se izvesti primjenom principa virtualnih radova [9]:

$$\int_V {}^tS_{ij} \delta {}^t\varepsilon_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^t t_i \delta ({}^t u_i + {}^t \tilde{u}_i) dA_\sigma, \tag{9}$$

gdje  $S_{ij}$  označava Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja druge vrste,  $\varepsilon_{ij}$  je Green-Lagrangeov tenzor deformacije iz izraza (5),  $t_i$  predstavlja površinske (kontaktne) sile, a  $u_i$  i  $\tilde{u}_i$  su linearne i nelinearne komponente pomaka. Eksponent 't' uz veličine označava da se radi o njihovim totalnim ili ukupnim vrijednostima, a 'δ' označava virtualnu veličinu. Tenzor naprezanja i površinske sile se mogu rastaviti i linearizirati kao:

$${}^tS_{ij} = {}^0S_{ij} + S_{ij}, \quad {}^t t_i = {}^0 t_i + t_i \tag{10}$$

pri čemu eksponent '0' znači da se radi o početnim ili inicijalnim vrijednostima, tj. vrijednostima prije pojave izvijanja. Uvrštavanjem izraza (5) i (10) u izraz (9) dobiva se:

$$\int_V ({}^0S_{ij} \delta e_{ij} + S_{ij} \delta e_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} + {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij}) dV = \int_{A_\sigma} ({}^0 t_i \delta u_i + {}^0 t_i \delta \tilde{u}_i + t_i \delta u_i) dA_\sigma. \tag{11}$$

Ako su početne vanjske i unutrašnje sile u ravnoteži,

If the initial external and internal forces are in equilibrium,

$$\int_V {}^0S_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_{A_\sigma} {}^0 t_i \delta u_i dA_\sigma, \tag{12}$$

jednadžba (11) se može napisati kao:

eq. (11) can be rewritten as

$$\int_V S_{ij} \delta e_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \eta_{ij} dV + \int_V {}^0S_{ij} \delta \tilde{e}_{ij} dV - \int_{A_\sigma} {}^0 t_i \delta \tilde{u}_i dA_\sigma = \int_{A_\sigma} t_i \delta u_i dA_\sigma, \tag{13}$$

gdje je  $C_{NS}$ , kn/h, cijena normiranog sata rada alatnog stroja,  $D$ , mm, je početni promjer obratka,  $L$ , mm, je dužina rezanja, a  $t_{A1}$ , min, je vrijeme za jednokratnu zamjenu alata [1].

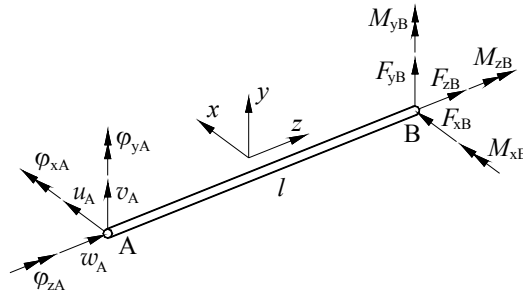
Nabavna cijena alata svedena na jednu reznu oštricu  $C_{A1}$ , kn, može se odrediti prema izrazu:

where  $C_{NS}$ , kn/hour, is the cost of standard working hour of an employed machine tool,  $D$ , mm, is the starting workpiece diameter,  $L$ , mm, is the cutting length, and  $t_{A1}$ , min, is the tool change time [1].

The purchase cost of tool  $C_{A1}$ , kn, per single cutting edge can be determined from:

Na slici 1 je prikazan prostorni gredni konačni element s 12 stupnjeva slobode.

A spatial beam element with 12 DOFs is shown in Figure 1.



Slika 1. Prostorni gredni konačni element: čvorni pomaci i čvorne sile  
Figure 1. Spatial beam element: nodal displacements and nodal forces

Odgovarajući vektori čvornih pomaka i čvornih sila su:

Corresponding nodal displacement and force vectors are:

$$(\mathbf{u}^e)^T = \{w_A, u_A, v_A, \phi_{zA}, \phi_{xA}, \phi_{yA}, w_B, u_B, v_B, \phi_{zB}, \phi_{xB}, \phi_{yB}\}, \quad (14)$$

$$(\mathbf{f}^e)^T = \{F_{zA}, F_{xA}, F_{yA}, M_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, F_{zB}, F_{xB}, F_{yB}, M_{zB}, M_{xB}, M_{yB}\} \quad (15)$$

gdje desni eksponent 'e' u oba vektora označava e-ti konačni element. Linearizirani princip virtualnih radova iz izraza (13) se može napisati kao:

$$\delta \mathcal{U}_E + \delta \mathcal{U}_G = \delta \mathcal{W} \quad (16)$$

gdje  $\delta \mathcal{U}_E$  predstavlja virtualnu energiju elastičnih deformacija,  $\delta \mathcal{U}_G$  predstavlja geometrijski potencijal, a  $\delta \mathcal{W}$  označava virtualni rad.

Usvojivši linearnu interpolaciju za  $w_o$  i kubičnu interpolaciju za  $u_o$ ,  $v_o$  i  $\phi_z$  i povezujući rezultante naprezanja grede u polju s rezultatama u čvorovima elementa, mogu se izvesti slijedeći izrazi:

$$\delta \mathcal{U}_E = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_E^e \mathbf{u}^e, \quad \delta \mathcal{U}_G = (\delta \mathbf{u}^e)^T \mathbf{k}_G^e \mathbf{u}^e, \quad \delta \mathcal{W} = (\delta \mathbf{u}^e)^T (\mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e), \quad (17)$$

gdje su  $\mathbf{k}_E^e$  i  $\mathbf{k}_G^e$  elastična i geometrijska matrica krutosti, odnosno na elementu prikazanom na slici 1,  $\mathbf{f}^e$  je vektor čvornih sila koji sadrži čvorne sile nastale zbog djelovanja drugih elemenata strukture na gredni element, a  $\mathbf{f}_{ekv}^e$  je ekvivalentni vektor opterećenja [9]. Komponente matrica  $\mathbf{k}_E^e$  i  $\mathbf{k}_G^e$  mogu se naći u literaturi [10, 11]. Uvrštavanjem jednadžbi (17) u izraz (16), jednadžba ravnoteže grednog elementa se može napisati kao:

$$(\mathbf{k}_E^e + \mathbf{k}_G^e) \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e + \mathbf{f}_{ekv}^e \quad (18)$$

Izraz (18) potrebno je transformirati u globalni koordinatni sustav primjenom standardnih transformacijskih procedura [9]. Potom se sumiranjem jednadžbi svih konačnih elemenata dobiva jednadžba konstrukcije

$$(\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{U} = \mathbf{P}. \quad (19)$$

gdje su  $\mathbf{K}_E$  i  $\mathbf{K}_G$  elastična i geometrijska matrica krutosti konstrukcije, dok  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{P}$  predstavljaju vektore inkrementalnih čvornih pomaka i inkrementalnih čvornih opterećenja konstrukcije.

Linearna se analiza stabilnosti temelji na pretpostavci da

where the right superscript 'e' at both vectors denotes the e-th finite element. The linearized virtual work principle from Eq. (13) can be written as:

where  $\delta \mathcal{U}_E$  represents the virtual elastic strain energy,  $\delta \mathcal{U}_G$  represents the geometric potential, while  $\delta \mathcal{W}$  denotes the virtual work.

By adopting a linear interpolation for  $w_o$  and a cubic interpolation for  $u_o$ ,  $v_o$  and  $\phi_z$  and by relating the beam stress resultants at the z-section to those at the element nodes, one can derive from the following:

where  $\mathbf{k}_E^e$  and  $\mathbf{k}_G^e$  are the elastic and geometric stiffness matrices, respectively, of the beam element from Fig. 1,  $\mathbf{f}^e$  is the nodal force vector containing nodal forces applied on the beam element by other elements of the structure, while  $\mathbf{f}_{ekv}^e$  is the equivalent load vector [9]. The entries contained in  $\mathbf{k}_E^e$  and  $\mathbf{k}_G^e$  can be found in [10, 11]. After substituting Eq. (17) into Eq. (15), the equilibrium equations of the beam element can be written as:

It is necessary to transform Eq. (18) in the global coordinate system by using standard transformation procedures [9]. After summation of the equilibrium equations for the all beam elements, the equilibrium equation for the structure can be obtained as:

where  $\mathbf{K}_E$  and  $\mathbf{K}_G$  represent the incremental elastic and geometric stiffness matrices of a structure, while  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{P}$  are the incremental displacement vector and the incremental vector of external loads of the structure respectively.

se vanjsko opterećenje prilikom izvijanja ne mijenja, tj.  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , te da je geometrijsku matricu  $\mathbf{K}_G$  moguće linearizirati izlučivanjem parametra  $\lambda$ , tj.  $\mathbf{K}_G = \lambda \hat{\mathbf{K}}_G$ . Stoga je izraz (19) moguće napisati u slijedećem obliku:

$$(\mathbf{K}_E + \lambda \hat{\mathbf{K}}_G) \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (20)$$

Izraz (20) predstavlja problem vlastitih vrijednosti gdje je  $\lambda$  vlastita vrijednost, odnosno parametar kritičnog opterećenja izvijanja, dok je  $\mathbf{U}$  pripadni vlastiti vektor koji predstavlja oblik izvijanja roštiljne konstrukcije.

#### 4. PRIMJER

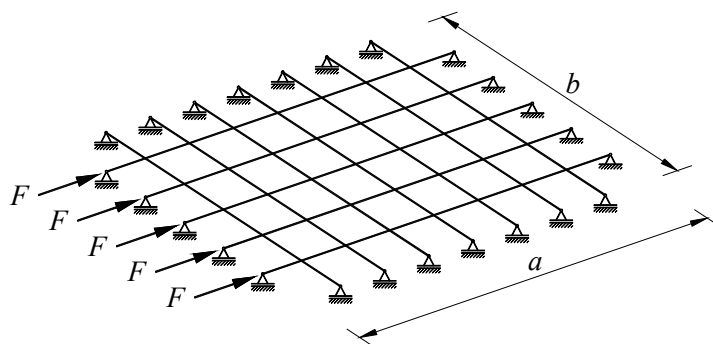
Prikazana numerička procedura implementirana je u kompjuterski program [7,12]. Analizirane su pravokutne roštiljne konstrukcije (slika 2) sastavljene od standardnih I-8 greda u razmaku od 1m. Geometrijske karakteristike poprečnog presjeka svih greda su:  $A = 758 \text{ mm}^2$ ,  $I_x = 77,8 \text{ cm}^4$ . Moduli elastičnosti i smicanja su  $E = 206 \text{ GPa}$  i  $G = 80 \text{ GPa}$ . Konstrukcije su sastavljene od pet ukrižanih greda, a broj glavnih greda se mijenja od 3 do 20. Širina konstrukcije  $b$  iznosi 6 m, a duljina  $a$  se mijenja od 4 m do 21 m. Sve grede su zgloбно oslonjene na krajevima. Opterećenje djeluje na uzdužne grede. Promatrana je promjena vrijednosti kritične sile ( $F = F_{cr}$ ) izvijanja i broja poluvalova izvijanja u ovisnosti o duljini roštiljne konstrukcije tj. broja glavnih greda.

Linear stability analysis is based on the assumption that the external loads during the buckling motion of the structure remain unchanged, i.e.  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , and that the geometric matrix  $\mathbf{K}_G$  can be linearized by extracting the parameter  $\lambda$ , i.e.  $\mathbf{K}_G = \lambda \hat{\mathbf{K}}_G$ . So Eq. (19) can be written as:

Equation (20) represents an eigenvalue problem, where the load parameter  $\lambda$  is the eigenvalue representing the critical buckling load parameter and the displacement vector  $\mathbf{U}$  is an eigenvalue representing a corresponding buckling deformation.

#### 4. EXAMPLE

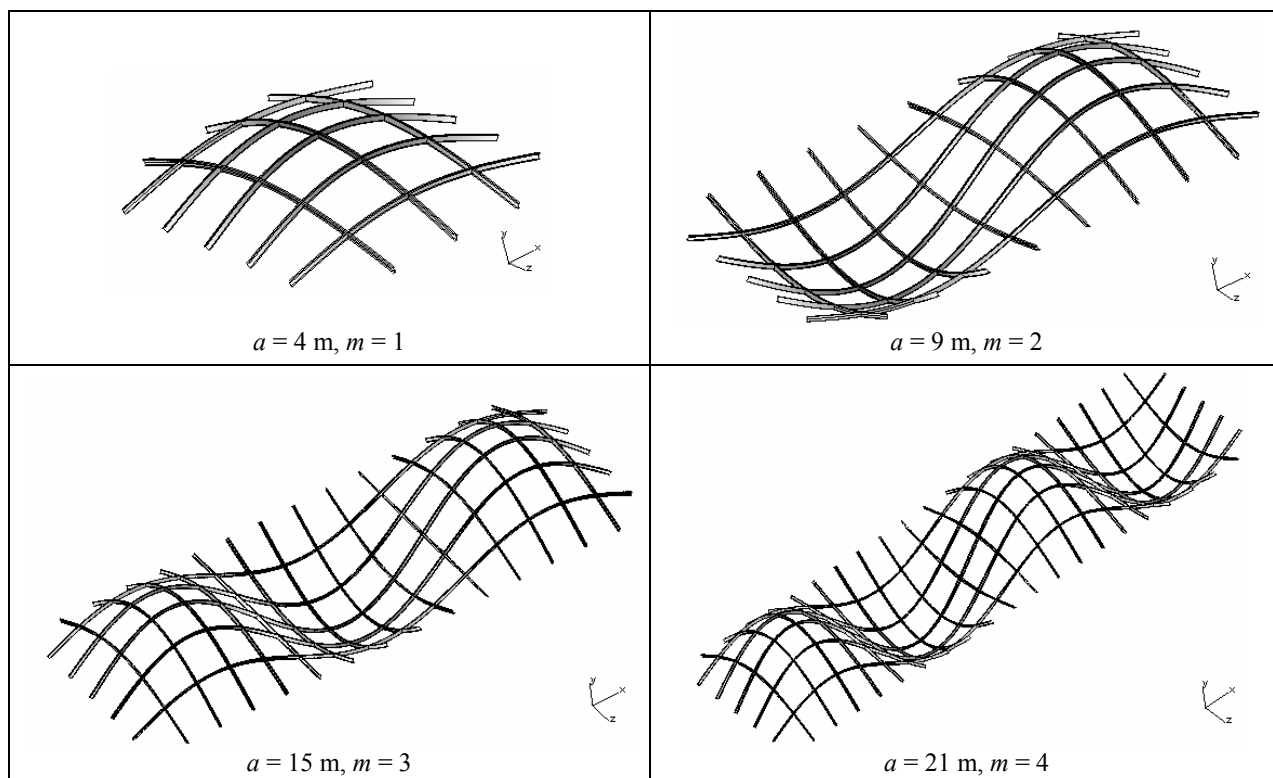
The aforementioned procedure was implemented in a computer program [7, 12]. The rectangular grillage structures (Figure 2) composed of standard I-8 beams in intervals of 1m are analyzed. The cross-section properties of all beams are:  $A = 758 \text{ mm}^2$ ,  $I_x = 77,8 \text{ cm}^4$ . Material moduli are  $E = 206 \text{ GPa}$  and  $G = 80 \text{ GPa}$ . Structures are constructed out of five longitudinal beams, while the number of transverse beams varies from 3 to 20. The width of the construction  $b = 6 \text{ m}$  is kept constant, while length varies from 4 m to 21 m. All the beams are simply supported at each end. Concentrated forces are applied on the longitudinal beams. The variation of the lowest critical load magnitude ( $F = F_{cr}$ ) and number of the half-waves  $m$  depending on construction length i.e. number of the main beams are calculated.



Slika 2. Roštiljna konstrukcija opterećena koncentriranim silama  
Figure 2. Grillage structure subjected to concentrated forces

Na slici 3 prikazani su prvi oblici izvijanja četiri roštiljne konstrukcije za različite duljine  $a$ .

Figure 3 shows first buckling modes for four different values of length  $a$ .



Slika 3. Prvi oblici izvijanja različitih roštiljnih konstrukcija

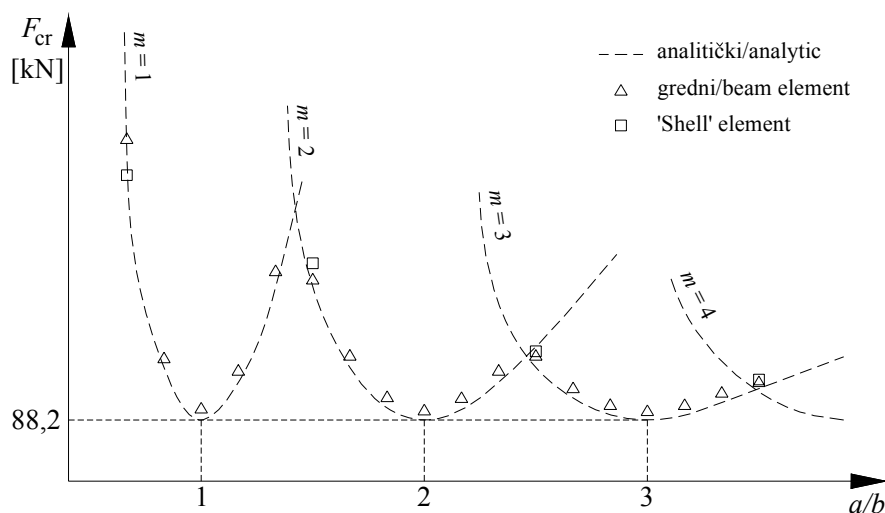
Figure 3. First buckling modes for different grillage structure

Usporedba numeričkih i analitičkih rezultata dana je u tablici 1 i na slici 4. Također su dani i rezultati dobiveni primjenom 'shell' modela.

Table 1 and Figure 4 show a comparison of numerical and analytical results. Results obtained by use of 'Shell' model are also given:

Tablica 1. Najmanje vrijednosti kritične sile i broj poluvalova za različiti omjer  $a/b$ Table 1. Lowest critical load and number of half-waves for different ratio  $a/b$ 

$a/b$		0,67	0,83	1	1,17	1,33	1,5	1,67	1,83	2	2,17	2,33	2,5	2,67	2,83	3	3,17	3,33	3,5
broj poluvalova no. of half-waves $m$		1					2					3					4		
$F_{cr}$ [kN]	analitički analytic	118,8	94,1	88,2	92,4	103,2	103,2	94,1	89,6	88,2	89,3	92,3	94,1	90,7	88,8	88,2	88,7	90,1	91,4
	gredni elem. beam elem.	120	95,1	89,4	93,7	105	104	95,4	90,7	89,2	90,6	93,7	95,4	91,7	89,8	89,1	89,8	91,2	92,4
	'Shell' element	116					106						96						92,8

Slika 4. Najmanje vrijednosti kritične sile u odnosu na omjer  $a/b$ Figure 4. Lowest critical load depending on ratio  $a/b$ 

## 5. ZAKLJUČAK

Iz analogije s tlačno opterećenim stupovima, moglo bi se pomisliti da najniže kritično opterećenje nastupa za  $m=1$ . Međutim, to nije točno jer  $m=1$  ne daje nužno najmanju vrijednost kritičnog naprezanja. Porastom duljine konstrukcije, povećava se i broj poluvalova prvog oblika izvijanja. Na slici 4 jasno se vidi koja veličina  $m$  daje najnižu vrijednost kritičnog opterećenja izvijanja u odnosu na omjer  $a/b$ . Broj poluvalova u smjeru kompresije ima takvu tendenciju da duljina poluvala bude što je moguće bliže duljini stranice  $b$ . Dobiveni numerički rezultati dobro se podudaraju s analitičkim.

## 5. CONCLUSION

Through analogy with columns one might think that the lowest critical load magnitude would occur for  $m=1$ . This is not true, however because  $m=1$  does not necessarily give the smallest value of the critical load. As the length of a structure increases, the number of half-waves in the first buckling mode is relatively bigger. From Figure 4, one can readily see which value of  $m$  yields the smallest critical load for a given  $a/b$  ratio. The number of half-waves in the direction of compression has the tendency to be such that the half-wavelength will be as close to the width of  $b$  as possible. Numerical results are in good accordance with analytic ones.

## 6. POPIS OZNAKA

površina poprečnog presjeka	$A$	- $m^2$
duljina	$a$	- $m$
širina	$b$	- $m$
modul elastičnosti	$E$	- $Pa$
vektor čvornih sila $e$ -tog kon. elementa	$\mathbf{f}^e$	
kritična sila	$F_{cr}$	- $N$
poprečne sile	$F_x, F_y$	- $N$
aksijalna sila	$F_z$	- $N$
glavni momenti inercije	$I_x, I_y$	- $m^4$
Saint-Venantova torzijska konstanta	$I_t$	- $m^4$
modul smicanja	$G$	- $Pa$
Wagnerov koeficijent	$\bar{K}$	- $Nm^2$
elastična matrica krutosti konstrukcije	$\mathbf{K}_E$	
elastična matrica krutosti $e$ -tog kon. elem.	$\mathbf{k}_E^e$	
geometrijska matrica krutosti konstrukcije	$\mathbf{K}_G$	
geom. matrica krutosti $e$ -tog kon. elementa	$\mathbf{k}_G^e$	
broj poluvalova	$m$	
momenti savijanja	$M_x, M_y$	- $Nm$
Saint-Venantov moment uvijanja	$M_z$	- $Nm$

## 6. LIST OF SYMBOLS

cross-sectional area	
length	
width	
modulus of elasticity	
force displacement vector for $e$ -th finite element	
critical force	
shear forces	
axial force	
principal moments of inertia	
Saint-Venant torsion constant	
shear modulus	
Wagner coefficient	
elastic stiffness matrices of a structure	
elastic stiffness matrix for $e$ -th finite element	
geometric stiffness matrices of a structure	
geometric stiffness matrix for $e$ -th finite element	
number of the half-waves	
bending moments	
Saint-Venant torsion moment	



vektor čvornih opterećenja konstrukcije	$\mathbf{P}$	vector of external loads of the structure
pozicijski vektor	$\mathbf{r}_0$	position vector
Piola-Kirchhoffov tenzor naprežanja	$S_{ij}$	Piola-Kirchhoff stress tensor
vektor pomaka	$\mathbf{U}$	displacement vector
vektor čvornih pomaka $e$ -tog kon. elementa	$\mathbf{u}^e$	nodal displacement vector for $e$ -th finite element
virtualna energija elastičnih deformacija	$\delta \mathcal{U}_E$ - J	virtual elastic strain energy
geometrijski potencijal	$\delta \mathcal{U}_G$ - J	geometric potential
translatorni pomaci	$w, u, v$ - m	rigid-body translations
virtualni rad	$\delta \mathcal{W}$ - J	virtual work
Green-Lagrangeov tenzor deformacija	$\varepsilon_{ij}$	Green-Lagrange strain tensor
vlastita vrijednost	$\lambda$	eigenvalue
normalno naprežanje	$\sigma$ - Pa	normal stress
posmično naprežanje	$\tau$ - Pa	tangential stress
kutovi uvijanja	$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ - rad	rigid-body rotations

## LITERATURA REFERENCES

- [1] Uršić, J.: *Čvrstoća broda II*, Fakultet strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1991.
- [2] Uršić, J.: *Čvrstoća broda III*, Fakultet strojarstva i brodogradnje sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1992.
- [3] Bai, Y.: *Marine Structural Design*, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [4] Bažant, Z.P., Cedolin, L.: *Stability of structures*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003.
- [5] Gambhir, M.L.: *Stability Analysis and Design of Structures*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [6] Nash, W.A.: *Strength of Materials*, McGraw-Hill, New York, 1998.
- [7] Turkalj, G., Brnić, J.: *Nonlinear stability analysis of thin-walled frames using UL-ESA formulation*, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 4 (1) 2004, 45-67
- [8] Chen W.F., Atsuta T.: *Theory of Beam-columns (Vol. 2)*, McGraw-Hill, New York, 1977.
- [9] Brnić, J., Turkalj, G.: *Nauka o čvrstoći II*, Zigo, Rijeka, 2006.
- [10] Boresi, A.P., Chong, K.P., Saigal, S.: *Approximate Solution Methods in Engineering Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [11] Turkalj, G., Brnić, J.: *Large rotations elastic buckling analysis of thin-walled beam structures*, Strojarsvo, 42 (5-6), 2000, 217-230
- [12] Pešić, I.: *Proračun roštiljne konstrukcije metodom konačnih elemenata*, Diplomski rad, Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci, Rijeka, 2006.

Pregledni članak

Subject review

Adresa autora / Authors' address:

Igor Pešić, dipl. ing.  
Prof. dr. sc. Goran Turkalj, dipl. ing.  
Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet  
Vukovarska 58  
HR-51000 Rijeka, Hrvatska

